Jacek Cichoń
Katedra Informatyki
Wydział Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej

MAP1156: Analiza Matematyczna II

Wykład przeznaczony jest dla studentów I roku I stopnia Inżynierii Biomedycznej na Wydziale Podstawowych Problemów Techniki. Odbywa się we wtorki, w godzinach 17:05-18:45 w sali 322/A1.

Na stronie tej znajdziesz informacje o zasadach zaliczenia, realizowanym materiale, literaturze oraz listę zadań.

Zasady zaliczania kursu

Ćwiczenia

Na ćwiczeniach odbędą się trzy 30 minutowe kolokwia. Na każdym z nich dostaniecie do zrobienia 3 zadania. Za każde z nich będziecie mogli otrzymać do 5 punktów. Za aktywność będzie można uzyskać dodatkowo do 5 punktów. Ocena końcowa (C) z ćwiczeń będzie wystawiana za pomocą następującej tabelki:

Pkt.	0..19	20..24	25..29	30..34	35..39	40..45	46..50
C	2.0	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5

Osoby, które uzyskają z ćwiczeń ocenę 5.5 będą zwolnione z egzaminu.

Egzamin

Terminy:

1. 18.06.2016 (sobota): godz. 11:00 - 13:00, sala 1.27/C13
2. 27.06.2016 (poniedziałek): godz. 13:00 - 15:00, sala 322/A1

ZASADY - OSTATECZNA WERSJA: 16.06.2016

1. Do egzaminu mogą przystąpić **WSZYSTKIE** osoby, nawet te, które otrzymały ocenę NDST z ćwiczeń.
2. Osoby, które otrzymały ocenę 5.5 z ćwiczeń będą ją miały przepisaną (nie musza się pojawiać na egzaminie).
3. Osoby, które mają ocenę 5.0 z ćwiczeń mogą zrezygnować z egzaminu. Jeśli nie przyjdą na egzamin, to będą miały przepisaną ocenę 5.0.
4. Osoby, które otrzymają z egzaminu ocenę 5.0 będa mogły poprawić ją na ocenę 5.5. W tym celu będą musiały się umówić ze mną na krótki egzamin ustny.

5. Do egzminu poprawkowego przystąpić mogą tylko te osoby, które z egzaminu w pierwszym terminie otrzymały ocenę ndst lub nie pojawiły się na nim (czyli: nie ma mozliwości poprawiania pozytywnych ocen).

Wyniki pierwszego egzaminu

Zadania oceniane były w skali [0,1]. Aby dostać ocenę dostateczną trzeba było uzbierać więcej niż 2 punkty. Przez ten prog nie przeszło 40 osób. Jedna osoba zebrała 5 pkt. Kilkanaście osób otrzymało zaledwie 0.5 pkt.

Osoby, które otrzymały ocenę pozytywną mają wynki wpisane do systemu Edukacja (sobota, 18.06.2016, godz. 20:00).

Osobom które nie zdały tego ezaminu radzę aby bardzo ostro wzięły się do nauki - musicie sobie również powtórzyć materiał z wykładu z Analizy I (nie mam pojęcia jak niektórym z was udało się zdać egzamin z Analizy I). Macie jeden tydzień czasu.

Zadania na drugim egzaminie będą podobne do tych, które były na pierwszym egzaminie.

Literatura

- Podstawowa
  1. F. Leja, Rachunek Różniczkowy i Całkowy, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2012
  2. W. Krysicki, L. Włodarski, Analiza Matematyczna w Zadaniach, Cz. I, PWN, Warszawa 2006
- Pomocnicza
  1. G. M. Fichtenholz, Rachunek Różniczkowy i Całkowy, T. I-II, PWN, Warszawa 2007
  2. M. Zakrzewski, "Markowe Wyklady z Matematyki, analiza", wydanie I, Wroclaw 2013, Oficyna Wydawnicza GiS
- Lista zadań: **Analiza2_20015_IB.pdf**
- Przykładowe zadania na egzamin: **Analiza2_Example_IB.pdf**
- Pytania do mnie związane z kursem: **QandA**

Zagadnienia omówione na wykładzie

Drugie i wyższe pochodne

1. Wzór Taylora
2. Jeśli funkcja f jest (n+1)-razy rózniczkowalna, to

$$f(a+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta x)}{(n+1)!} x^k$$

dla pewnego $\theta \in (0,1)$.

3. Funkcja wykładnicza
4. $$e^x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$
5. Def. Zbiór $A \subseteq \mathbf{R}^2$ jest **wypukły**, jeśli $(\forall P, Q \in A)(\overline{PQ} \subseteq A)$.
6. Tw: Jeśli f ma ciągłą drugą pochodną oraz $f'(a) = 0$ i $f''(a) > 0$ to f ma lokalne minimum w punkcie a.
7. Tw: Jeśli f ma ciągłą drugą pochodną oraz $f'(a) = 0$ i $f''(a) < 0$ to f ma lokalne maksimum w punkcie a.
8. Def: Funkcja f jest **wypukła** na odcinku I, jeśli zbiór $\{(x,y) : y \geq f(x)\}$ jest wypukły.
9. Def: Funkcja f jest **wklęsła** na odcinku I, jeśli zbiór $\{(x,y) : y \leq f(x)\}$ jest wypukły.
10. Tw. Jeśli $f''(x) > 0$ dla $x \in I$ to f jest wypukła na odcinku I.
11. Tw. Jeśli $f''(x) < 0$ dla $x \in I$ to f jest wklęsła na odcinku I.

Szeregi

1. Def. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny jeśli ciąg sum częściowych $s_n = \sum_{n=0}^{n} a_k$ jest zbieżny.
2. Przykład: $\sum_{n\geq 0} (\frac{1}{2})^n = 2$.
3. Tw. Jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_n a_n = 0$.
4. Przykład: $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = \infty$.
5. Def. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny
6. Tw: Jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to jest zbieżny
7. **Kryterium d'Alamberta**
   1. Jeśli $\lim_n |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny
   2. Jeśli $\lim_n |\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny
8. **Kryterium Cauchy'ego**
   1. Jeśli $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny

2. Jeśli $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny

9. Tw (o zagęszczaniu) Jeśli $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq 0$ to następujące zdabia są równoważne:
   1. szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny
   2. szereg $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ jest zbieżny
10. Tw (o szeregach naprzemiennych) Załóżmy, że $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq 0$ oraz, że $\lim_n a_n = 0$. Wtedy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ jest zbieżny
11. Przykład: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2$

Przestrzeń $\mathbf{R}^n$

1. Def. (Odległość euklidesowa) $d(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$.
2. Def. Ciąg punktów (P_n) przestrzeni $\mathbf{R}^N$ jest zbieżny do punktu $G \in \mathbf{R}^N$ ($\lim_n P_n = G$) jeśli
$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N)(\forall n \geq N)(d(P_n, G) < \epsilon)$$
3. Przykład: $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n+2}, (1 + \frac{1}{n})^n, \sqrt[n]{n} \right) = (1, e, 1)$.

[15.03.2016] Pochodna - I

1. Wykresy 3D oraz **wykresy konturowe** funkcji $f(x,y) = x^2 + y^2$, $f(x,y) = x^2 - y^2$,$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$, $f(x,y) = \frac{1}{x^2-y^2}$, $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.
2. Tw. Jeśli A jest zwarty i $f : A \to \mathbf{R}$ jest ciągła, to istnieje punkt $a \in A$ w którym funkcja f osiąga maksimum.
3. Tw. Dla dowolnych $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ mamy $\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$; czyli *średnia geometryczna jest mniejsza lub równa od średniej arytmetycznej*.
4. Def. **Funkcjonał liniowy**: odwzorowanie liniowe ϕ postaci $\phi(\vec{x}) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$
5. Def. **Pochodną** funkcji $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ nazywamy taki funkcjonał liniowy $\phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, że
6. $$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x+h) - (f(x) + \phi(h))|}{||h||} = 0$$
   Funkcjonał ten oznaczamy $f'(x)$
   Uwaga: $||h|| = \sqrt{h_1^2 + \ldots + h_n^2}$, czyli $||h||$ oznacza długość wektora h.
7. Pochodna cząstkowa:
   1. $\frac{df}{dx_1}(a_1, \ldots, a_n) = g_1'(a_1)$, gdzie $g_1(x) = f(x, a_2, \ldots, a_n)$,
   2. $\frac{df}{dx_2}(a_1, \ldots, a_n) = g_2'(a_1)$, gdzie $g_2(x) = f(a_1, x, a_2, \ldots, a_n)$,

3. ...
4. $\frac{df}{dx_n}(a_1,\ldots,a_n) = g_n'(a_1)$, gdzie $g_n(x) = f(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},x)$

8. Tw. Jeśli $f'(a)(h) = c_1h_1 + \ldots + c_nh_n$ to $c_i = \frac{df}{dx_i}(a)$
9. Def. Jeśli $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ to gradientem funkcji f w punkcie $a \in \mathbf{R}^n$ nazywamy wektor

$$grad(f)(a) = \nabla f(a) = \left[\frac{df}{dx_1}(a),\ldots,\frac{df}{dx_n}(a)\right] .$$

[22.03.2016] Pochodna - II

1. Tw. Jeśli wszystkie pochodne cząstkowe $\frac{df}{dx_i}$ są ciągłe w pewnym otoczeniu element $a \in \mathbf{R}^n$ to funkcja coągła jest rózniczkowalna w punkcie a.
2. Tw. Jeśli $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ jest ciągła i $c \in \mathbf{R}$ to zbiór $\{x \in \mathbf{R}^n : f(x) = c\}$ jest domkniętym podzbiorem $\mathbf{R}^n$.
3. Def. **Pochodną kierunkową** funkcji $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ w punkcie a w kierunku v nazywamy liczbę

$$f_v'(a) = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t} .$$

4. Tw. Jeśli f jest rózniczkowalna w punkcie a to $f_v'(a) = \nabla f(a)\cdot v$
5. Def. Funkcja $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ ma **lokalne minimum [maksimum]** w punkcie a jeśli $(\exists\epsilon > 0)(\forall x \in K(a,\epsilon)(x \neq a \to f(x) > f(a))$ $[(\exists\epsilon > 0)(\forall x \in K(a,\epsilon)(x \neq a \to f(x) < f(a))]$
6. Jeśli f ma lokalne ekstremum w punkcie a i ma pochodne cząstkowe w punkcie a to $\frac{df}{dx_1}(a) = \frac{df}{dx_2}(a) = \ldots = \frac{df}{dx_n}(a)$.
7. Def. **Macierzą Jacobiego** funkcji $f = (f_1,\ldots,f_m) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ w punkcie a nazywamy macierz

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(a) \\ \nabla f_2(a) \\ \ldots \\ \nabla f_m(a) \end{pmatrix}$$

8. Przykład: Dla $f(t) = \begin{pmatrix} r\cos(\omega t) \\ r\sin(\omega t) \\ vt \end{pmatrix}$ mamy $J_f(t) = \begin{pmatrix} -r\omega\sin(\omega t) \\ r\omega\cos(\omega t) \\ v \end{pmatrix}$. Ponadto $||J_f(t)|| = \sqrt{r^2\omega^2 + v^2}$.
9. Def. **Hesjanem** funkcji $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ w punkcie a nazywamy macierz $H_f(a) = [a_{i,j}]_{i,j=1,\ldots,n}$, gdzie $a_{i,j} = \frac{d^2f}{dx_jdx_j}$

[12.04.2016] Ekstrema

1. Kryterium na istnienie lokalnych ekstremów
   Niech $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Załóżmy, że $\nabla f(a) = \vec{0}$. Niech $H_f(a) = [a_{i,j}]_{i,j=1,\ldots n}$ oraz $M_k = det([a_{i,j}]_{i,j=1,\ldots,k}]$.
   1. Jeśli $(\forall k = 1, \ldots, n)(M_k > 0)$, to f ma lokalne minimum w punkcie a
   2. Jeśli $(\forall k = 1, \ldots, n)((-1)^k M_k > 0)$, to f ma lokalne maksimum w punkcie a
   3. Jeśli $M_n \neq 0$, ale nie zachodzi warunek (1) lub (2), to f ma punkt siodłowy w punkcie a

   (Dowód: zapraszam chętnych na konsultacje)
2. Przykłady. Znajdowanie ekstremów funkcji na zbiorach zwartych.
3. **Pochodna funkcji złożonej.** Niech $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ oraz $g : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^k$ będą funkcjami różniczkowalnymi. Wtedy
   $$J_{g\circ f}(a) = J_g(f(a)) \circ J_f(a)\ .$$
4. Przykład (reguła łańcucha): Jeśli $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ oraz $g : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$, to
   $$\frac{d(g\circ f)}{dx_i}(a) = \sum_{k=1}^{m} \frac{dg}{dy_k}(f(a))\frac{df_k}{dx_i}(a)\ ,$$

[19.04.2016] Całkowanie

1. Omówiliśmy kilka przykładów na zastosowanie mnożników Lagrange'a
2. Pojęcie prostokąta n-wymiarowego i jego n-wymiarowej objętości:
   $$\lambda([a_1,b_1] \times \ldots \times [a_n,b_n]) = |b_1 - a_1| \cdot \ldots \cdot |b_n - a_n|$$
3. Pojęcie całki funkcji n-zmiennych
4. Tw. Funkcje ciągłe sa całkowalne
5. **Twierdzenie Fubbiniego** (dla funkcji 2 zmiennych). Jeśli $A = [a,b] \times [c,d] \to \mathbf{R}$ oraz $f : A \to \mathbf{R}$ jest całkowalna, to
6. $$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx$$
7. Policzyliśmy kilka przykładów.

[26.04.2016] Całkowanie

1. Obserwacje: $\lambda^{(1)}(A)$ = długość(A); $\lambda^{(2)}(A) = pow(A)$; $\lambda^{(3)}(A) = vol(A)$
2. Obserwacja: $\lambda(A) = \iint_P 1_A(\vec{x})d\vec{x}$, gdzie P jest n-wymiarowym prostokątem takim, że$A \subseteq P$ oraz

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & : x \in A \\ 0 & : x \notin A \end{cases}$$

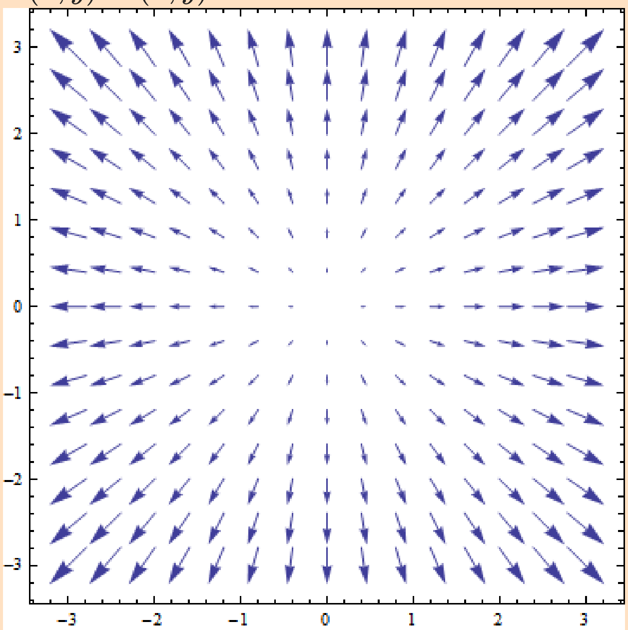
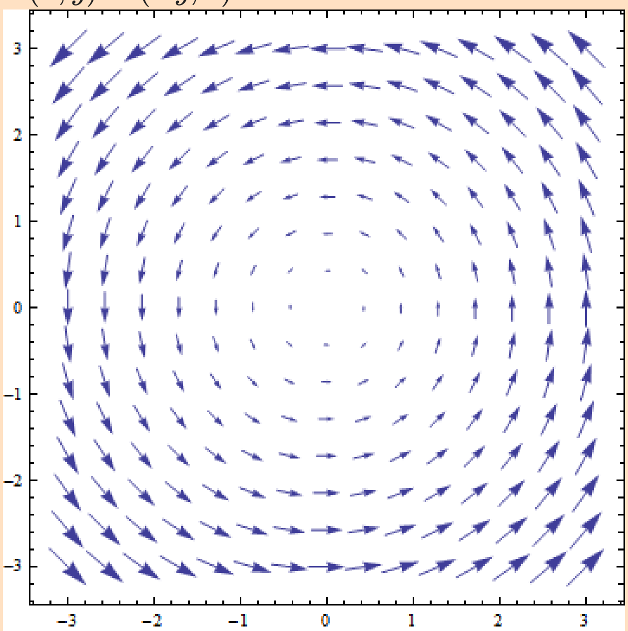
3. **Twierdzenie Fubbiniego** Jeśli $Q = [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$, $P = [a_1, b_1] \times Q$ oraz $f : P \to \mathbf{R}$ jest całkowalna, to
4. $$\int_P f(\vec{x}) dx_1 \ldots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_Q f(\vec{x}) dx_2 \ldots dx_n \right.$$
5. Przykład: Jeśli $\Sigma_n = \{(x_1, \ldots, x_n) : 0 \leq x_1, \ldots, x_n \wedge x_1 + \ldots + x_n \leq 1\}$, to $\lambda(\Sigma_n) = \frac{1}{n!}$.
6. **Twierdzenie** Załóżmy, że $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest różniczkowalna oraz różnowartościowa wewnątrz zbioru A oraz $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ to
7. $$\int_{\Phi(A)} f(\vec{u}) d\vec{u} = \int_A (f \circ \Phi)(\vec{x}) |det(J_\Phi(\vec{x})| d\vec{x} .$$
8. Pokazaliśmy, że wielkoludy mocno się pocą a krasnoludki marzną.

[10.05.2016] Całkowanie; współrzędne biegunowe i cylindryczne

1. Powierzchnia elipsy: rozważaliśmy odwzorowanie $\Phi(x, y) = (ax, by)$; policzyliśmy wyznacznik Jakobianu $det(J_\Phi(x, y)) = ab$; wzieliśmy $K = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$; sprawdziliśmy, że $\Phi(K) = \{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$; policzyliśmy
$$\iint_{\Phi(K)} 1 \cdot dxdy = \iint_K 1 \cdot ab \cdot dudv = \pi ab.$$
2. Współrzędne biegunowe: $\Phi(r, t) = (r\cos(t), r\sin(t))$; mamy $\Phi : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$; ponadto $det(J_\Phi(r, t)) = r$
3. CAŁKA GAUSSA
4. $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$
5. Współrzędne sferyczne:
$$\Phi(r, \theta, t) = (r\sin(\theta)\cos(t), r\sin(\theta)\sin(t), r\cos(\theta))$$

- $\Phi : [0, +\infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^3$;
- $det(J_\Phi(r, \theta, t)) = r^2 \sin(\theta)$

[17.05.2016] Całkowanie; całka skierowana

1. Pokazliśmy, że objętość n-wymiarowej kuli o promieniu R wyraża się wzorem $V_n(R) = a_n R^n$, gdzie ciąg (a_n) spełnia następującą zależność rekurencyjną $a_{n+2} = \frac{2\pi}{n+2}$.
2. Pokazaliśmy, że $\lim_n \frac{V_{2n}(1)}{2^{2n}} = 0$.
3. Wprowadzilismy pojęcie pola wektorowego i przyjrzeliśmy się kilku przykładom:
   1. $\vec{F}(x, y) = (x, y)$
   
   2. $\vec{G}(x, y) = (-y, x)$
   
4. Zdefiniowaliśmy **całke krzywoliniową** z pola wektorowego i pokazaliśmy, że

$$\int_L \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_a^b F(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt \,,$$

jeśli ϕ jest parametryzacją łuku skierowanego L.

[24.05.2016] Całka skierowana

1. Oznaczenie: jeśli $\vec{F}(\vec{x}) = (F_1(\vec{x}), \ldots, F_n(\vec{x})$ to
$$\int_\phi \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_\phi (F_1 dx_1 + \ldots + F_n dx_n) \,.$$
2. Pole potencjalne: takie pole wektorowe $\vec{F}$, że istnieje funkcja $U : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ taka, że
$$\vec{F} = \nabla U \,.$$
Funkcję U nazywamy potencjałem.
3. Tw. Jeśli $U : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ jest potencjałem pola wektorowego $\vec{F}$ oraz $\phi : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ jest krzywą zorientowaną, to
$$\int_\phi \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = U(b) - U(a) \,.$$
4. Omówiliśmy podstawowe zastosowania całki krzywoliniowej do zbadania pola z potencjałem $U(x, y, z) = \frac{c}{r}$, gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
5. **Twierdzenie Green'a.** Jeśli $P \subseteq \mathbf{R}^2$ jest obszerem jednospójnym, to
$$\int_{\partial P} (Pdx + Qdy) = \iint_P \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dx} \right) dxdy \,.$$

[31.05.2016] Rotacja i Twierdzenie Gaussa

1. Iloczyn wektorowy (pracujemy w $\mathbf{R}^3$): $\vec{v} = \vec{u} \times \vec{w}$ jeśli $\vec{v}$ jest prostopadły do wektorów $\vec{u}$ i $\vec{w}$, jego długość równa $|\vec{u}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin(\alpha)$, gdzie α jest równa kątowi między wektorami $\vec{u}$ i $\vec{w}$ zaś orientacja jest wyzanczona za pomocą "reguły kciuka"$.
2. Oznaczamy $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$. Wtedy
$$\vec{u} \times \vec{w} = det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix}$$
3. Rotacją pola wektorowego $\vec{F}$ nazywamy wektor
$$rot(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix}$$
4. Twierdzenie: Jeśli pole $\vec{F}$ jest potencjalne, to $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$.

5. Pojęcie całki powierzchniowej: $\int_\Phi \vec{F} \cdot \overrightarrow{d\sigma}$
6. Dywergencja pola: $div(\vec{F})$ = $\nabla \cdot \vec{F} = \sum_{k=1}^{n} \frac{dF_i}{dx_i}$
7. **Twierdzenie Gaussa** Jeśli V jest bryłą (bez "dziur") w przestrzeni $\mathbf{R}^3$ oraz ∂V oznacza jej brzeg skierowany na zewnątrz bryły, to
$$\int_{\partial V} \vec{F} \cdot \overrightarrow{d\sigma} = \int_V (\nabla \cdot \vec{F}) dxdydz\ .$$
8. Pierwsze równanie Maxwela: $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
9. Wniosek. Jeśli $\vec{E}$ jest centralnym polem elektrycznym to
$$|E_r| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}\ ,$$
gdzie Q oznacza ładunek wewnątrz kuli o promieniu r.

[07.06.2016] Całka powierzchniowa

1. Przykłady obliczeń skierowanej całki powierzchniowej z pola wektorowego.
2. Twierdzenie Stokes'a: Jeśli Σ jest płatem powierzchniowym, to
$$\int_{\partial\Sigma} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_\Sigma (\nabla \times \vec{F}) \cdot \overrightarrow{d\sigma}$$
3. Zastosowania twierdzenia Stockes'a.
4. Równania Maxwell'a
5. Relatywistyczna interpretacja pochodzenia pola magnetycznego

[13.06.2016] Podsumowanie

Omówiliśmy najważniejsze pojęcia, metody i twierdzenia omówione na całym wykładzie.